

Burnside-Ringe

Vortrag im Rahmen des Seminars zur Computeralgebra

Oliver Braun, Sebastian Schönbeck

Wintersemester 2010/11

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	4
2. Grundlagen und der Burnside-Ring	5
2.0.1. Definition: G -Mengen und Ähnlichkeit	5
2.0.2. Definition: Diagonale Operation	5
2.0.3. Satz: Hauptsatz über transitive G -Mengen	5
2.1. Markentafeln	5
2.1.1. Definition: Fixpunkte	5
2.1.2. Lemma	6
2.1.3. Korollar	6
2.1.4. Definition: Markentafel	7
2.1.5. Beispiel: Markentafel der S_3	7
2.1.6. Beispiel: Weitere Markentafeln	8
2.2. Verbände und Abzählringe	8
2.2.1. Definition: Verband	8
2.2.2. Beispiele: Teiler- und Teilmengenverband, Untergruppenverband .	9
2.2.3. Definition: Halbgruppenring	9
2.2.4. Lemma: Operation auf dem Halbgruppenring	10
2.2.5. Satz: Definition und Eigenschaften des Fixrings	10
2.2.6. Satz: R^\vee und R^\wedge	12
2.3. Der Burnside-Ring	13
2.3.1. Definition: Burnside-Ring	13
2.3.2. Satz: R^\wedge und der Burnside-Ring	15
3. Abzählprobleme	19
3.0.3. Definition: Färbungen und Farbenzähler	19
3.0.4. Lemma: U -Fixpunkte auf F^M	20
3.0.5. Satz	21
3.0.6. Beispiel	22

4. Zur Struktur des Burnside-Rings	25
4.0.7. Satz: Primideale im Burnside-Ring	25
4.0.8. Satz: Der Burnside-Ring des direkten Produkts	26
4.0.9. Beispiel	27
A. Literatur	29

1. Einleitung

In der vorliegenden Ausarbeitung wollen wir eine Möglichkeit vorstellen, einen Überblick über alle Operationen einer gegebenen endlichen Gruppe G auf endlichen Mengen zu gewinnen. Dies geschieht durch Definition einer Ringstruktur auf der Menge aller G -Mengen.

Dazu werden wir diese zunächst einführen und im Anschluss Parallelen zu bekannten Strukturen ziehen, welche es ermöglichen, auf einfache Art und Weise im entstehenden Ring zu rechnen.

Schließlich stellen wir Anwendungen dieser Theorie auf Abzählprobleme vor. Es wird insbesondere möglich sein, Abzählprobleme nicht nur quantitativ (wie in der Vorlesung zur Computeralgebra), sondern auch qualitativ zu untersuchen.

2. Grundlagen und der Burnside-Ring

Wir möchten zunächst an folgende Grundlagen erinnern. Es sei in dieser Ausarbeitung, sofern nicht anders vermerkt, G stets eine endliche Gruppe.

2.0.1. Definition: G -Mengen und Ähnlichkeit

Operiert eine Gruppe G auf einer Menge M durch eine Operation ω , so nennt man (M, ω) (bzw. oft auch nur M) eine G -Menge.

Zwei G -Mengen M, N heißen ähnlich, falls es eine bijektive Abbildung φ zwischen ihnen gibt, sodass $\varphi(gm) = g\varphi(m)$ für alle $g \in G, m \in M$ gilt. φ heißt dann eine Ähnlichkeit von G -Mengen. Die Eigenschaft $\varphi(gm) = g\varphi(m)$ nennt man G -Äquivarianz von φ .

2.0.2. Definition: Diagonale Operation

Operiert G auf den Mengen M und N , so operiert G ebenfalls auf $M \times N$ durch $g(m, n) := (gm, gn)$. Diese Operation nennt man diagonale Operation.

2.0.3. Satz: Hauptsatz über transitive G -Mengen

Die Ähnlichkeitsklassen der transitiven G -Mengen und die Konjugiertenklassen von Untergruppen von G stehen zueinander in Bijektion.

Für einen Beweis verweisen wir auf [1]. □

2.1. Markentafeln

2.1.1. Definition: Fixpunkte

Operiert eine Gruppe G auf einer Menge M , so definieren wir

$$\text{fix}_G(M) := \{m \in M \mid gm = m \ \forall g \in G\}$$

2.1.2. Lemma

Für zwei Untergruppen U_i, U_j einer Gruppe G gilt:

Es existiert ein Fixpunkt von U_i auf $G/U_j \Leftrightarrow U_i$ ist konjugiert zu einer Untergruppe von U_j .

Außerdem ist $\text{fix}_{U_i}(G/U_j)$ konstant auf der Konjugiertenklasse von U_i vermöge $\text{fix}_{xU_ix^{-1}}(G/U_j) = x \text{fix}_{U_i}(G/U_j)$.

Beweis:

$$\#\text{fix}_{U_i}(G/U_j) = \#\{pU_j \mid upU_j = pU_j \ \forall u \in U_i\} = \#\{pU_j \mid pU_i p^{-1} \leq U_j\}$$

Damit folgt die Behauptung. □

2.1.3. Korollar

Als einfaches Korollar des vorangegangenen Lemmas erhalten wir nun die folgenden Aussagen über Fixpunkte:

1. Notwendig für die Existenz eines Fixpunktes ist $|U_j| \mid |U_i|$.
2. $U_j \leq U_i \Rightarrow$ Es existiert mindestens ein Fixpunkt.
3. Für $U, V \leq G$ mit $U \cong V$ und $U \not\sim V$ gilt $\text{fix}_V(G/U) = \emptyset$.
4. Für $U \leq G$ gilt $\text{fix}_U(G/U) = N_G(U)/U$.
5. $V \leq U \trianglelefteq G \Rightarrow \text{fix}_V(G/U) = G/U$.

2.1.4. Definition: Markentafel

Für eine endliche Gruppe G definieren wir die Matrix $(M(G))_{ij} := (|\text{fix}_{U_j}([G/U_i])|)_{1 \leq i, j \leq k}$ als die Markentafel von G . Dabei bilden die U_i ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G mit $U_1 = \{1\}$, $U_k = G$ und $|U_i| \leq |U_j|$, falls $i < j$.

Nach 2.1.2 ist die Anzahl der Fixpunkte auf einer Konjugiertenklasse konstant und die Markentafel somit wohldefiniert.

Mit den vorhin gemachten Bemerkungen ist es nun relativ leicht, Markentafeln für endliche Gruppen aufzusetzen.

2.1.5. Beispiel: Markentafel der S_3

Um diese Markentafel aufzustellen, wählen wir $U_1 = \{1\}$, $U_2 = C_2$, $U_3 = C_3$, $U_4 = S_3$ (jeweils beliebige Vertreter der Konjugiertenklassen). Die Markentafel ist also eine 4×4 -Matrix. Mit 2.1.3(4) erleichtert man sich das Bestimmen der Einträge auf der Hauptdiagonalen. Durch Punkt (5) der dortigen Bemerkungen wird das ganze sogar nochmals vereinfacht, da $\{1\}, C_3, S_3 \trianglelefteq S_3$ ($[S_3 : C_3] = 2$).

Also hat man die Einträge an den Positionen $(1, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ als 6, 2 und 1. Eintrag $(2, 2)$ erfordert nun die Bestimmung von $|\text{fix}_{C_2}([S_3/C_2])|$, was gerade $[N_{S_3}(C_2) : C_2]$ entspricht. Dies liefert 1 als Eintrag.

2.1.3(1) liefert zudem Nullen oberhalb der Hauptdiagonalen und an der Position $(3, 2)$. Da die erste Spalte $|\text{fix}_{\{1\}}(G/U_i)|$ als Einträge hat, können wir sie mit $|G/U_i|$ auffüllen. Es bleiben noch zwei Einträge in der letzten Zeile übrig. Diese geben jedoch gerade die Anzahl der Fixpunkte auf der einelementigen Menge S_3/S_3 an. Diese sind also stets 1, da nach 2.1.3(2) für jede Untergruppe der S_3 mindestens ein Fixpunkt existieren muss. Die Markentafel der S_3 lautet also:

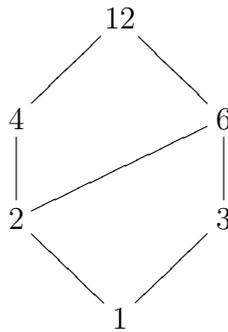
$$M(S_3) = \begin{pmatrix} 6 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 2 & & 2 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Auf einem Verband $(\mathcal{V}, \vee, \wedge)$ lässt sich durch $v \leq w :\Leftrightarrow v \wedge w = v$ eine partielle Ordnung definieren.

2.2.2. Beispiele: Teiler- und Teilmengenverband, Untergruppenverband

Auf der Menge der Teiler $T(n)$ lässt sich für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Verband definieren durch $(T(n), \text{kgV}, \text{ggT}, |)$, der so genannte Teilerverband.

Analog kann man die Verbände $(\text{Pot}(M), \cup, \cap, \subseteq)$ (Teilmengenverband) und $(\mathcal{U}(G), \langle \cdot \rangle, \cap, \leq)$ (Untergruppenverband) definieren. Wir illustrieren den Teilerverband der Zahl 12 zur Verdeutlichung grafisch:



2.2.3. Definition: Halbgruppenring

Ist (M, \cdot) eine endliche Halbgruppe (d.h. eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung), so definieren wir den Halbgruppenring $\mathbb{Z}M$ als

$$\mathbb{Z}M = \left\{ \sum_{m \in M} a_m m \mid a_m \in \mathbb{Z}, a_m \neq 0 \text{ nur für endlich viele } m \right\}$$

mit der Addition $\sum_{m \in M} a_m m + \sum_{m \in M} b_m m = \sum_{m \in M} (a_m + b_m) m$ und der Multiplikation

$$\left(\sum_{m \in M} a_m m \right) \left(\sum_{m \in M} b_m m \right) = \sum_{m \in M} \sum_{st=m} a_s b_t m.$$

2.2.4. Lemma: Operation auf dem Halbgruppenring

Operiert eine Gruppe G durch Automorphismen auf der Halbgruppe M , so operiert G auch durch Ringautomorphismen auf $\mathbb{Z}M$.

Beweis: Sei $g \in G$. Da G durch Automorphismen auf M operiert, ist $g \sum_{m \in M} a_m m = \sum_{m \in M} a_m g m$.

Untersuche nun die Verträglichkeit mit der Summenbildung:

$$\begin{aligned} & g \left(\sum_{m \in M} a_m m + \sum_{m \in M} b_m m \right) \\ &= g \left(\sum_{m \in M} (a_m + b_m) m \right) \\ &= \sum_{m \in M} (a_m + b_m) g m \\ &= \sum_{m \in M} a_m g m + \sum_{m \in M} b_m g m = g \left(\sum_{m \in M} a_m m \right) + g \left(\sum_{m \in M} b_m m \right). \end{aligned}$$

Verträglichkeit mit Multiplikation:

$$\begin{aligned} & g \left(\left(\sum_{m \in M} a_m m \right) \left(\sum_{m \in M} b_m m \right) \right) \\ &= g \left(\sum_{m \in M} \sum_{st=m} a_s b_t m \right) \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{st=m} a_s b_t g m \\ &= \sum_{m \in M} \sum_{gsqt=gm} a_s b_t g m \\ &= \left(\sum_{m \in M} a_m g m \right) \left(\sum_{m \in M} b_m g m \right) = g \left(\sum_{m \in M} a_m m \right) g \left(\sum_{m \in M} b_m m \right) \end{aligned}$$

2.2.5. Satz: Definition und Eigenschaften des Fixrings

Die Gruppe G operiere so durch Automorphismen auf der Halbgruppe M , dass die Bahnen der Operation endlich sind. Dann ist $\text{fix}_G(\mathbb{Z}M)$ ein Teilring von $\mathbb{Z}M$ und wir nennen $\text{fix}_G(\mathbb{Z}M)$ den Fixring des Halbgruppenringes $\mathbb{Z}M$.

$\text{fix}_G(\mathbb{Z}M)$ hat als \mathbb{Z} -Modulbasis die so genannten Bahnsummen $\bar{B} := \sum_{m \in B} m$ der Bahnen

der Operation von G auf M und es gilt $\text{fix}_G(\mathbb{Z}M) = \bigoplus_{B \in M/G} \mathbb{Z}\bar{B}$.

Wir multiplizieren in $\text{fix}_G(\mathbb{Z}M)$ durch $\bar{B} \cdot \bar{C} = \sum_{D \in M/G} \mu_{B,C}^D \bar{D}$, wobei $\mu_{B,C}^D = |\{(m, n) \in B \times C \mid m \cdot n = d\}| \in \mathbb{Z}$ mit einem beliebig aber fest gewählten $d \in D$ gilt.

Einen Ring, der isomorph zu $\text{fix}_G(\mathbb{Z}M)$ ist und eine wie hier beschriebene Basis besitzt, nennen wir den G -Abzählring von M oder auch den (M, \cdot, G) -Abzählring.

Beweis: Dass eine Ringstruktur vorliegt, folgt sofort daraus, dass G durch Automorphis-

men auf $\mathbb{Z}M$ operiert.

Für eine Bahn B unter G und eine zugehörige Bahnsumme $\bar{B} = \sum_{m \in B} m$ gilt nun

$$g\bar{B} = g \sum_{m \in B} m = \sum_{m \in B} gm = \sum_{m \in M} m = \bar{B}$$

da Anwenden von g auf einer Bahn eine Bijektion ist. Also ist $\bar{B} \in \text{fix}_G(\mathbb{Z}M)$.

Sei nun $f \in \text{fix}_G(\mathbb{Z}M)$, also $gf = f$. G operiert nach Voraussetzung auf M , also zerfällt M in die Bahnen unter dieser Operation, d.h. $M = \dot{\bigcup}_{B \in M/G} B$. Also gilt:

$$f = \sum_{m \in M} a_m m = \sum_{B \in M/G} \sum_{m \in B} a_m m$$

Es bleibt zu zeigen, dass f auf den Bahnen von G auf M konstante Koeffizienten hat. Seien dazu m, m' Elemente einer Bahn B' und g ein Gruppenelement, sodass $gm = m'$ gilt. Dann ist

$$gf = \sum_{\substack{B \in M/G \\ B \neq B'}} \sum_{\ell \in B} a_\ell g\ell + \sum_{\substack{k \in B' \\ k \neq m}} a_k gk + a_m gm = \sum_{\substack{B \in M/G \\ B \neq B'}} \sum_{\ell \in B} a_\ell g\ell + \sum_{\substack{k \in B' \\ k \neq m}} a_k gk + a_m m'$$

was $gf \neq f$ als Element von $\mathbb{Z}M$ impliziert, falls $a_m \neq a_{m'}$, da das Anwenden von g eine Bijektion auf M darstellt. Daher können wir schreiben:

$$f = \sum_{m \in M} a_m m = \sum_{B \in M/G} \sum_{m \in B} a_m m = \sum_{B \in M/G} a_B \sum_{m \in B} m = \sum_{B \in M/G} a_B \bar{B}$$

Dass die Bahnsummen \bar{B} \mathbb{Z} -linear unabhängig sind, folgt daraus, dass bereits die $m \in M$ über \mathbb{Z} linear unabhängig sind (nach Definition von $\mathbb{Z}M$).

Da wir wissen, dass G auf $\mathbb{Z}M$ durch Automorphismen operiert, ist der Koeffizient eines fest gewählten d auf seiner Bahn konstant, sodass wir den Koeffizienten der Bahnsumme kennen, wenn wir den Koeffizienten eines Elementes der Bahn kennen. Also folgt bereits $\bar{B} \cdot \bar{C} = \sum_{D \in M/G} \mu_{B,C}^D \bar{D}$ mit $\mu_{B,C}^D = |\{(m, n) \in B \times C \mid m \cdot n = d\}| \in \mathbb{Z}$ und einem fest gewählten $d \in D$. \square

Betrachtet man nun erneut den Untergruppenverband $(\mathcal{U}(G), \langle \cdot \rangle, \cap, \leq)$, so stellt man fest, dass $(\mathcal{U}(G), \langle \cdot \rangle)$ und $(\mathcal{U}(G), \cap)$ Halbgruppen bilden. Der folgende Satz illustriert die Zusammenhänge zwischen den Abzählringen dieser zwei Halbgruppen.

2.2.6. Satz: R^\vee und R^\wedge

Sei $(\mathcal{V}, \wedge, \vee)$ ein endlicher Verband und \leq eine partielle Ordnung auf \mathcal{V} . Die Gruppe G operiere auf \mathcal{V} durch Verbandsautomorphismen. Es seien zudem $(B_i)_{i \in \underline{s}}$ die Bahnen auf \mathcal{V} unter G . Dabei sei B_1 das minimale und B_s das maximale Element des Verbandes (bezüglich \leq). Zudem ordnen wir die Bahnen \mathbb{E} so an, dass aus $v \in B_i$, $w \in B_j$ und $v \leq w$ folgt, dass $i \leq j$.

1. Der (\mathcal{V}, \wedge, G) -Abzählring habe die Basis $(b_i^\wedge)_{i \in \underline{s}}$ entsprechend den $(B_i)_{i \in \underline{s}}$ (vgl. 2.2.5). Dann ist $R^\wedge \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation) durch den Isomorphismus

$$b_i^\wedge \mapsto (\alpha_{i1}^\wedge, \dots, \alpha_{is}^\wedge) \text{ mit } \alpha_{ij}^\wedge = |\{x \in B_i \mid x \leq y\}| \text{ f\"ur ein festes } y \in B_j.$$

2. Analog habe der (\mathcal{V}, \vee, G) -Abzählring R^\vee die Basis $(b_i^\vee)_{i \in \underline{s}}$. Dann ist $R^\vee \cong \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}$ durch den Isomorphismus

$$b_i^\vee \mapsto (\alpha_{i1}^\vee, \dots, \alpha_{is}^\vee) \text{ mit } \alpha_{ij}^\vee = |\{x \in B_i \mid y \leq x\}| \text{ f\"ur ein festes } y \in B_j.$$

3. Es gilt $\alpha_{ij}^\vee |B_j| = \alpha_{ji}^\wedge |B_i|$ und $|B_i| = \alpha_{is}^\vee = \alpha_{i1}^\wedge$.

Beweis: Zu jedem $v \in \mathcal{V}$ gibt es einen Homomorphismus $\alpha_v : \text{fix}_G(\mathbb{Z}\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{Z}$, festgelegt durch $vx = \alpha_v(x)v + \sum_{\substack{k \leq v \\ k \neq v}} \gamma_k k$. $\alpha_v(x)$ ist also der Koeffizient von v in vx . Es gilt $\alpha_v(xy) = \alpha_v(x)\alpha_v(y)$, denn man hat $vx = \alpha_v(x)v + \sum_{\substack{k \leq v \\ k \neq v}} \gamma_k k$ und $vy = \alpha_v(y)v + \sum_{\substack{k \leq y \\ k \neq y}} \lambda_k k$ und im Produkt dieser beiden Ausdrücke liest man ab, dass der Koeffizient von v gerade das Produkt der Koeffizienten von v in vx und vy ist, da in Produkten, in denen eine der Summen auftaucht, der Koeffizient von v stets 0 ist, da in den Summen lediglich Elemente

vorkommen, die echt kleiner als v sind (bezüglich der Relation \leq auf dem Verband). Die Additivität von α_v ergibt sich sofort aus dem Distributivgesetz im Ring $\mathbb{Z}\mathcal{V}$.

Liegen zwei Elemente v, w des Verbands in einer Bahn unter G , so ist $\alpha_v = \alpha_w$. Damit erhalten wir für jede Bahn $(B_i)_{i \in \mathcal{S}}$ einen Homomorphismus α_i . Somit können wir diese zusammensetzen zu einem Ringhomomorphismus

$$\alpha : \text{fix}_G(\mathbb{Z}\mathcal{V}) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}\overline{B_i} \rightarrow \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}, \quad x \mapsto (\alpha_1(x), \dots, \alpha_s(x))$$

Da $\text{fix}_G(\mathbb{Z}\mathcal{V})$ und $\bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}$ den gleichen \mathbb{Z} -Rang haben, bleibt nur noch zu zeigen, dass es sich bei α um einen Epimorphismus handelt. Dazu stellen wir α als Matrix $A^\wedge \in \mathbb{Z}^{s \times s}$ bezüglich $(\overline{B_i})_{i \in \mathcal{S}}$ im Ausgangsraum und der Standardbasis im Zielraum dar.

Die i -te Zeile ist dann gerade $\alpha(b_i^\wedge)$ (bei zeilenweiser Abbildung) und die Matrix A^\wedge ist in unterer Dreiecksgestalt. Um dies zu sehen, betrachten wir $\alpha_i(b_j^\wedge)$ mit $i > j$. Für beliebiges aber festes $a \in b_i^\wedge$ ist dies gerade $|\{b \in B_j \mid a \wedge b = a\}|$, was aus der Definition der α_i folgt. Ist jedoch $b < a$, so ist $b \wedge a = b < a$ oder sind b und a bzgl. \leq nicht vergleichbar, so ist ebenfalls $b \wedge a < a$. Also ist $\alpha_i(b_j^\wedge) = 0$, woraus die Dreiecksgestalt von A^\wedge folgt. Für festes $a \in B_i$ ist außerdem $\alpha_i(b_i^\wedge) = |\{a' \in B_i \mid a' \wedge a = a\}| = |\{a\}| = 1$. Auf der Hauptdiagonalen von A^\wedge stehen also nur Einsen. Es ist also $\det(A^\wedge) = 1$ und es folgt, dass α ein Isomorphismus ist.

Den Beweis der Aussagen über R^\vee führe man analog.

Zu Punkt 3): $\alpha_{ij}^\wedge |B_j| = |\{(v, w) \in B_i \times B_j \mid w \leq v\}| = \alpha_{ji}^\vee |B_i|$ □

2.3. Der Burnside-Ring

Nun definieren wir den Burnside-Ring einer endlichen Gruppe.

2.3.1. Definition: Burnside-Ring

Es sei G eine endliche Gruppe. Auf der Menge \hat{G} der Ähnlichkeitsklassen $[M]$ der endlichen G -Mengen M definieren wir die folgenden Verknüpfungen:

$$\hat{G} \times \hat{G} \rightarrow \hat{G} : [M] + [N] := [M \dot{\cup} N] \text{ mit } M \cap N = \emptyset$$

$$\hat{G} \times \hat{G} \rightarrow \hat{G} : [M] \cdot [N] := [M \times N]$$

wobei wir für die Addition die Operation von G auf M und N auf $M \dot{\cup} N$ fortsetzen und für die Multiplikation G auf $M \times N$ diagonal operiert. Wir werden sehen, dass die zwei Verknüpfungen $+$, \cdot assoziativ sind, sodass $(\hat{G}, +, \cdot)$ ein kommutativer Halbring mit $0 = [\emptyset]$ und $1 = [\{1\}]$ ist (d.h. $(\hat{G}, +)$ und (\hat{G}, \cdot) sind kommutative Monoide und die Distributivgesetze gelten).

Auf $\hat{G} \times \hat{G}$ definieren wir nun die Äquivalenzrelation \sim :

$$([M_1], [M_2]) \sim ([N_1], [N_2]) :\Leftrightarrow [M_1] + [N_2] = [N_1] + [M_2]$$

Die Äquivalenzklasse eines Paares $([M], [N])$ bezeichnen wir auch als $[M] - [N]$. Insbesondere bezeichnen wir die Äquivalenzklassen von $([M], [\emptyset])$ und $([\emptyset], [M])$ als $[M]$ und $-[M]$.

Mit dieser Äquivalenzrelation können wir jetzt dem Burnside-Ring von G definieren als $B(G) := (\hat{G} \times \hat{G}) / \sim$.

$B(G)$ machen wir mittels der zwei folgenden Verknüpfungen zu einem Ring:

$$([M_1] - [M_2]) + ([N_1] - [N_2]) := ([M_1] + [N_1]) - ([M_2] + [N_2])$$

$$([M_1] - [M_2]) \cdot ([N_1] - [N_2]) := ([M_1] \cdot [N_1] + [M_2] \cdot [N_2]) - ([M_1] \cdot [N_2] + [M_2] \cdot [N_1])$$

Zudem können wir \hat{G} in $B(G)$ einbetten durch $\hat{G} \hookrightarrow B(G) : [M] \mapsto [M] := [M] - [\emptyset]$, d.h. die Abbildung ist injektiv und verträglich mit $+$ und \cdot .

$B(G)$ ist ein freier \mathbb{Z} -Modul mit Basis $\mathcal{B} := \{[G/U] \mid U \in \mathcal{V}\}$, wobei \mathcal{V} ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G ist.

Beweis: Die Assoziativität von $+$ und \cdot auf \hat{G} folgt aus der Assoziativität von $\dot{\cup}$ und \times .

In $(\hat{G} \times \hat{G}) / \sim$ sind $[\emptyset]$ das neutrale Element der Addition (offensichtlich) und $[\{1\}]$ das

neutrale Element der Multiplikation ($M \times \{1\} \cong M$ als G -Menge; identifiziere $(a, 1)$ mit a).

Das Distributivgesetz gilt, da $A \times (B \dot{\cup} C) = A \times B \dot{\cup} A \times C$ gilt. Der Ring ist außerdem kommutativ, da $A \times B$ und $B \times A$ als G -Mengen offensichtlich ähnlich sind.

Dass $B(G)$ ein freier \mathbb{Z} -Modul mit der angegebenen Basis ist, folgt sofort aus dem Hauptsatz über transitive G -Mengen. \square

Nun wollen wir 2.2.6 anwenden, um das Rechnen im Burnside-Ring zu vereinfachen.

2.3.2. Satz: R^\wedge und der Burnside-Ring

Sei G eine endliche Gruppe, $(B_i)_{i \in \underline{s}}$ die Familie der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G , $(U_i)_{i \in \underline{s}}$ mit $U_i \in B_i \forall i$ ein Vertretersystem eben dieser sowie $(M_i)_{i \in \underline{s}}$ mit $M_i \cong G/U_i$ (als G -Menge) ein Vertretersystem der Ähnlichkeitsklassen transitiver G -Mengen. Desweiteren sei $R^\wedge(G)$ der Abzählring des Untergruppenverbands von G mit \cap und der Konjugation als Operation mit einer geeigneten Basis $(b_i^\wedge)_{i \in \underline{s}}$ bezüglich der U_i . In der Sprache von Satz 2.2.5 also $b_i^\wedge = \sum_{V \in B_i} V$.

Dann gilt:

$$\phi : B(G) \rightarrow R^\wedge(G); [M_i] \mapsto n_i \cdot b_i^\wedge$$

ist ein Ringmonomorphismus, wobei wir $n_i := |N_G(U_i)/U_i|$ setzen.

Beweis: Nach Definition handelt es sich bei $B(G)$ und $R^\wedge(G)$ um zwei \mathbb{Z} -Moduln von gleichem Rang (nämlich s). Da die Standardbasis von $B(G)$ unter ϕ auf offensichtlich linear unabhängige Elemente von $R^\wedge(G)$ abgebildet wird, handelt es sich um einen injektiven Modulhomomorphismus (Verträglichkeit mit der Addition nach Definition).

Es bleibt also zu zeigen, dass ϕ mit den Multiplikationen in $B(G)$ und $R^\wedge(G)$ verträglich ist. Sei dazu:

$$[M_i] [M_j] = \sum_{k=1}^s \lambda_{i,j}^k [M_k]$$

$\lambda_{i,j}^k \in \mathbb{Z}$ gibt dabei an, wieviele Bahnen vom Isomorphietyp G/U_k in $M_i \times M_j$ auftreten.

Außerdem:

$$b_i^\wedge b_j^\wedge = \sum_{k=1}^s \alpha_{ij}^{\wedge, k} b_k^\wedge$$

in der Notation von Satz 2.2.6.

Für die Verträglichkeit mit der Multiplikation ist nun also gefordert:

$$n_k \lambda_{i,j}^k b_k^\wedge = n_i n_j \alpha_{ij}^{\wedge, k} b_k^\wedge$$

\Leftrightarrow

$$\frac{n_i n_j}{n_k} \alpha_{ij}^{\wedge, k} = \lambda_{i,j}^k \quad \forall k$$

Dann gilt (mit obiger Charakterisierung von $\lambda_{i,j}^k$):

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j}^k &= \frac{1}{|G/U_k|} \cdot |\{(m, n) \in M_i \times M_j \mid \text{Stab}_G((m, n)) \in B_k\}| \\ &= \frac{|U_k|}{|G|} \cdot \frac{|G|}{|N_G(U)|} |\{(m, n) \in M_i \times M_j \mid \text{Stab}_G((m, n)) = U_k\}| \\ &= \frac{1}{n_k} |\{(m, n) \in M_i \times M_j \mid \text{Stab}_G((m, n)) = U_k\}| \\ &\stackrel{*}{=} \frac{n_i n_j}{n_k} |\{(U, V) \in B_i \times B_j \mid U \cap V = U_k\}| \\ &= \frac{n_i n_j}{n_k} \alpha^{\wedge, k} \end{aligned}$$

Dabei gilt (*) wegen:

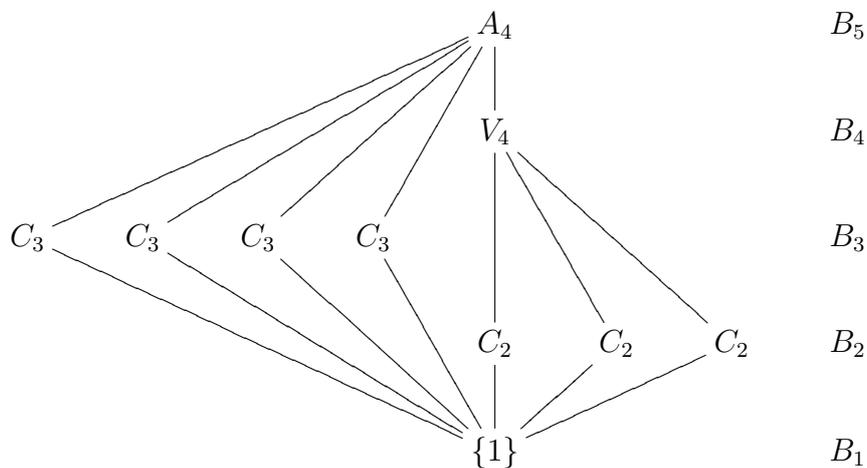
$$\begin{aligned} &|\{(m, n) \in M_i \times M_j \mid \text{Stab}_G(m) = U, \text{Stab}_G(n) = V\}| \\ &= |\{m \in M_i \mid \text{Stab}_G(m) = U\}| \cdot |\{n \in M_j \mid \text{Stab}_G(n) = V\}| \\ &= \frac{|N_G(U)|}{|U|} \cdot \frac{|N_G(V)|}{|V|} = n_i \cdot n_j \end{aligned}$$

Da für $m \in M_i$ gilt: Ist $U = \text{Stab}_G(m)$ so ist $U \in B_i$, also U konjugiert zu U_i und damit

$$\frac{|N_G(U)|}{|U|} = n_i. \quad \square$$

Durch diese Einbettung des Burnside-Ringes der Gruppe G in den Fixring des Untergruppenverbandes können wir also nun bereits im Burnside-Ring rechnen, wenn wir im Fixring rechnen können. Das fällt uns aber bedeutend leichter, da dieser isomorph zu einer direkten Summe von s Kopien von \mathbb{Z} ist.

An dieser Stelle möchten wir nun den letzten Satz nutzen, um im Burnside-Ring der alternierenden Gruppe vom Grad 4 zu rechnen. Dazu bestimmen wir zunächst den Untergruppenverband dieser Gruppe:



Daraus erarbeiten wir uns nun A^\vee . Zur Erinnerung: Es ist $A_{ij}^\vee = \alpha_{ij} = |\{b \in B_i \mid b \leq a\}|$ für ein festes $a \in B_j$.

$$A^\vee = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 3 & 3 \\ & & 1 & 0 & 4 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Über die Beziehung $\alpha_{ij}^\vee |B_j| = \alpha_{ji}^\wedge |B_i|$ und $|B_i| = \alpha_{is}^\vee = \alpha_{i1}^\wedge$ aus 2.2.6 erhalten wir A^\wedge als $D(A^\vee)^{tr} D^{-1}$, wobei D die Diagonalmatrix ist, deren Einträge gerade aus den Längen der Konjugiertenklassen bestehen (dies ist ebenfalls gerade die letzte Spalte von A^\vee),

also in diesem Fall $D = D_{A_4} = \text{diag}(1, 3, 4, 1, 1)$.

$$A^\wedge = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 3 & 1 & & & \\ 4 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Multipliziert man nun noch jede Zeile von A^\wedge mit $[N_G(U_i) : U_i]$ für ein U_i in seiner Bahn, so erhält man (vergleiche voriger Satz) $M(G)$, in diesem Fall:

$$M(A_4) = \begin{pmatrix} 12 & & & & \\ 6 & 2 & & & \\ 4 & \cdot & 1 & & \\ 3 & 3 & \cdot & 3 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nun kann man aus dem (komponentenweisen) Produkt der dritten und vierten Zeile beispielsweise ablesen, dass $[A_4/C_3][A_4/C_2] = [A_4]$.

3. Abzählprobleme

Wir wollen nun unser Wissen über den Burnside-Ring nutzen, um Abzählprobleme, beispielsweise im Zusammenhang mit „Färbungen“, anzugehen. Zunächst müssen wir uns dazu auf eine Notation für „Färbungen“ einigen.

3.0.3. Definition: Färbungen und Farbenzähler

Seien G eine endliche Gruppe und M, F zwei endliche G -Mengen. Bekanntermaßen operiert G auf F^M vermöge

$$G \times F^M \rightarrow F^M, (g, f) \mapsto f \circ \bar{g}^{-1}$$

Dabei ist \bar{g} die durch g auf M induzierte Permutation.

Jede Bahn von F^M unter G nennen wir nun eine Färbung (mit Farbenmenge F).

Da F endlich ist, können wir die Elemente auffassen als Variablen x_1, \dots, x_n im Polynomring $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist die Abbildung

$$\psi : F^M \rightarrow \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n], f \mapsto \prod_{m \in M} f(m)$$

offensichtlich G -invariant und wir nennen sie den Farbenzähler von f .

Ist $Gf \subseteq F^M$ mit $\psi(f) = x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}$ eine Färbung, so sagen wir Gf ist vom Färbungstyp $x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}$.

Das Burnside'sche Fixpunktlema gäbe uns nun Auskunft über die Anzahl der Bahnen in F^M . Wir wollen jedoch zusätzlich herausfinden, welche Äquivalenzklassen von Bahnen vorliegen und von welchem Färbungstyp diese sind. Dazu genügt es offenbar, festzustellen, welche Art von G -Menge (als Element des Burnside-Ringes $B(G)$) $\psi^{-1}(\{x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}\})$ ist.

Erinnern wir uns an die kanonischen Erzeuger des Burnside-Ringes, so stellt sich also nur noch die Frage, wieviele Fixpunkte die verschiedenen Untergruppen von G auf $\psi^{-1}(\{x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}\})$ haben.

3.0.4. Lemma: U -Fixpunkte auf F^M

Dass $f \in F^M$ fix unter $U \leq G$ ist, ist äquivalent dazu, dass f konstant auf den U -Bahnen von M ist (die Anzahl der U -Fixpunkte ist also $|F|^{|M/U|}$). Wir können dies sogar noch genauer fassen, denn es gilt: die Anzahl der U -Fixpunkte in $\psi^{-1}(\{x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}\})$ ist gleich dem Koeffizienten von $x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}$ in dem Polynom

$$p_U = p_U(x_1, \dots, x_n) := \prod_{j=1}^{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i^{\lambda(j)}$$

Dabei habe U genau α Bahnen auf M , deren Längen mit $\lambda(j)$, $j \in \underline{\alpha}$ bezeichnet seien.

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich. Ist nun f ein Fixpunkt unter U und B eine Bahn von M unter U , so gilt $f(m) = x_i$ für alle $m \in B$ für ein festes $i \in \underline{n}$. Der Beitrag dieser Bahn zu $x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}$ ist dann gerade $x_i^{|B|} = x_i^{\lambda(j)}$ für geeignetes $\lambda(j)$.

Der Koeffizient des Farbenzählers zählt also die Anzahl der möglichen Abbildungen f , die auf jeder Bahn von M unter U konstant und gerade von diesem Färbungstyp sind (das entspricht der Anzahl der Möglichkeiten, $x_1^{a(1)} \cdots x_n^{a(n)}$ als Kombinationen der $x_i^{\lambda(j)}$ der einzelnen Bahnen zu erhalten). \square

Bemerkung: Die Summe aller Koeffizienten in p_U entspricht dann natürlich der Anzahl aller U -Fixpunkte von F^M . Finden wir nun also eine effektive Methode zum Bestimmen der $\lambda(j)$ für jede Untergruppe U , so kennen wir bereits den G -Mengentyp von F^M . Diese können wir nun aber mit Hilfe des Burnside-Ringes bestimmen.

3.0.5. Satz

$(U_i)_{i \in \mathcal{S}}$ sei ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G , $p_i := p_{U_i}$ wie im Lemma zuvor. Dann sei

$$\begin{aligned} q &:= \sum_{a(1)+\dots+a(n)=|M|} \left[\psi^{-1}(\{x_1^{a(1)} \dots x_n^{a(n)}\}) \right] x_1^{a(1)} \dots x_n^{a(n)} \\ &= \sum_{a(1)+\dots+a(n)=|M|} \left(\sum_{i=1}^s r_{a(1),\dots,a(n);i} [G/U_i] \right) x_1^{a(1)} \dots x_n^{a(n)} \quad (*) \\ &= \sum_{i=1}^s \underbrace{\sum_{a(1)+\dots+a(n)=|M|} r_{a(1),\dots,a(n);i} x_1^{a(1)} \dots x_n^{a(n)} [G/U_i]}_{q_i} \end{aligned}$$

(*): stelle $\psi^{-1}(\{x_1^{a(1)} \dots x_n^{a(n)}\})$ als Linearkombination in der Standardbasis von $B(G)$ dar.

das Element von $B(G)[x_1, \dots, x_n]$, das die Anzahl $r_{a(1),\dots,a(n);i}$ der Färbungen vom Äquivalenztyp $[G/U_i]$ mit Färbungstyp $x_1^{a(1)} \dots x_n^{a(n)}$ angibt. Identifiziert man nun wie üblich $[G/U_i]$ mit der i -ten Zeile der Markentafel $M(G)$ von G , so gilt

1. $(q_1, \dots, q_s) = (p_1, \dots, p_s)(M(G))^{-1}$
2. Die $\lambda(\ell) = \lambda(i, \ell)$ von U_i auf M (aus den p_i) liest man ab aus

$$[M][G/U_i] = \sum_{\ell=1}^s m_{i,\ell} [G/U_\ell]$$

mit $\lambda(i, \ell) := \frac{|G/U_\ell|}{|G/U_i|} = \frac{|U_i|}{|U_\ell|}$ mit Vielfachheit $m_{i,\ell}$, d.h.

$$p_i = \prod_{\ell=1}^s \left(\sum_{r=1}^n x_r^{\lambda(i,\ell)} \right)^{m_{i,\ell}}$$

für $i = 1, \dots, s$. Dabei ist $m_{i,\ell} = 0$, falls $\lambda(i, \ell)$ nicht ganzzahlig ist.

Beweis: Zu 1): (p_1, \dots, p_s) gibt jeweils die Anzahl (und Art) der Fixpunkte von F^M unter den Konjugiertenklassen von Untergruppen von G an. Insbesondere handelt es sich also um eine Darstellung zur Standardbasis von \mathbb{Z}^s . Die Multiplikation mit $(M(G))^{-1}$ stellt

also lediglich einen Basiswechsel in die Standardbasis des Burnside-Ringes dar, da wir aus der Anzahl der Fixpunkte unter den einzelnen Untergruppen auf diese Art und Weise ablesen können, wie sich F^M aus den kanonischen transitiven G -Mengen zusammensetzt.

Zu 2): Wir erinnern zunächst an folgenden bekannten Satz: Es operiere G transitiv auf M und es sei $S := \text{Stab}_G(m')$ für ein festes $m' \in M$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den G -Bahnen auf $M \times N$ und den S -Bahnen auf N . Dann haben wir also

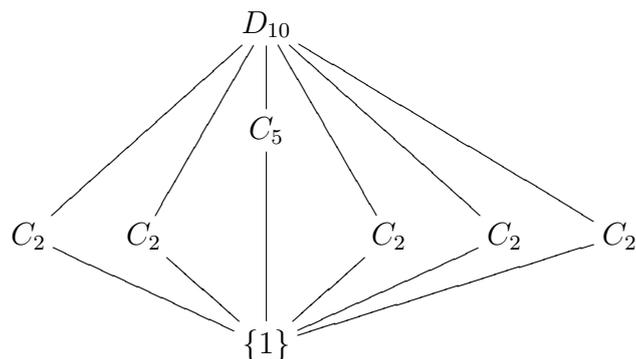
$$|G| = |\text{Stab}_S(n)| \cdot |G(m', n)|, \quad |S| = |\text{Stab}_S(n)| \cdot |Sn|$$

$$\Rightarrow |Sn| = \frac{|S|}{|G|} |G(m', n)|$$

Dies wenden wir nun auf die im Satz beschriebene Situation an, denn da G transitiv auf G/U_i operiert, stehen die G -Bahnen von $M \times G/U_i$ in Bijektion zu den U_i -Bahnen auf M . Dann gilt offenbar mit obiger Beobachtung einer U_i -Bahn der Länge $\lambda(i, \ell)$ entspricht eine G -Bahn der Länge $\lambda(i, \ell) \cdot |G/U_i|$. Dann ergibt sich aber die behauptete Formel unmittelbar aus der Definition der p_i (fasse Bahnen gleicher Länge zusammen). \square

3.0.6. Beispiel

Wir wollen die Anzahl und Art der Färbungen eines regelmäßigen Fünfecks mit drei Farben bestimmen. Dabei betrachten wir je zwei solche Einfärbungen als gleich, wenn sie in einer Bahn unter der Operation der D_{10} liegen. Dabei ist $D_{10} = \langle (1, 2, 3, 4, 5), (2, 5)(3, 4) \rangle$ und diese Gruppe hat den folgenden Untergruppenverband.



Dabei liegen die 5 Untergruppen vom Typ C_2 alle in einer Konjugiertenklasse. Als Kontrollergebnis wollen wir zunächst mit dem Burnside'schen Fixpunktlemma nur die An-

zahl der Bahnen bzw. Färbungen bestimmen. Dazu

$$\frac{1}{10} (3^5 + 5 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3) = 39$$

Damit wir im Burnside-Ring rechnen können, bestimmen wir zunächst die Markentafel. Dies geschieht wie in 2.3.2 über die Bestimmung von A^\vee . Wie man leicht nachrechnet, gilt

$$A^\vee = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 5 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^\wedge = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 5 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M(D_{10}) = \begin{pmatrix} 10 & & & \\ 5 & 1 & & \\ 2 & 0 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Markentafel und der Formel aus 3.0.4 erhalten wir

U	$[M][G/U]$	p_U
C_1	$5[G/C_1]$	$(x + y + z)^5$
C_2	$[G/C_2] + 2[G/C_1]$	$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)^2$
C_5	$[G/C_1]$	$(x^5 + y^5 + z^5)$
D_{10}	$[G/C_2]$	$(x^5 + y^5 + z^5)$

Die Vielfachheiten q_i der verschiedenen Färbungstypen erhalten wir jetzt ebenfalls nach 3.0.5 durch

$$\begin{aligned} (q_1, \dots, q_4) &= (p_1, \dots, p_4)(M(D_{10})^{-1}) = \\ &\left(2xy^3z + 2x^2y^2z + 2x^2yz^2 + 2xyz^3 + 2xy^2z^2 + 2x^3yz, \right. \\ &2x^3y^2 + 2x^3z^2 + xy^4 + 2xy^2z^2 + xz^4 + x^4y + 2x^2y^3 + 2x^2yz^2 \\ &+ 2y^3z^2 + yz^4 + x^4z + 2x^2y^2z + 2x^2z^3 + y^4z + 2y^2z^3, \\ &0, \\ &\left. x^5 + y^5 + z^5 \right) \end{aligned}$$

Aus der Summe der Koeffizienten im ersten Eintrag liest man hier beispielsweise ab, dass $\mathfrak{z}^{[M]}$ 12 Bahnen vom Typ $[G/C_1]$ hat. Dabei sind jeweils zwei vom Färbungstyp xy^3z , x^2y^2z etc. Insbesondere können wir das Ergebnis von oben bestätigen. Die Summe

der Koeffizienten aller im Vektor eingetragenen Polynome ergibt mit 39 genau die oben ermittelte Anzahl an Bahnen.

Eine weitere Anwendung unseres letzten Resultats liegt darin, dass wir nun zu einer gegebenen G -Menge M auf einfache Art und Weise bestimmen können, von welchem Äquivalenztyp als G -Menge ihre Potenzmenge $\text{Pot}(M)$ ist.

Dazu identifizieren wir jede Teilmenge von M in bijektiver Weise mit ihrer charakteristischen Funktion; wir betrachten also die Färbungen von M mit zwei Farben, indem wir je eine „Farbe“ mit 0 und 1 identifizieren. Beispielhaft wollen wir den Äquivalenztyp von $\text{Pot}(M)$ mit $M = A_4/C_2$ als A_4 -Menge bestimmen. Wie oben bereits gesehen gilt

$$M(A_4) = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 & 2 \\ 4 & \cdot & 1 \\ 3 & 3 & \cdot & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und wir errechnen wie im vorherigen Beispiel

U	$[M][G/U]$	p_U
C_1	$6[G/C_1]$	$(x+y)^6$
C_2	$2[G/C_2] + 2[G/C_1]$	$(x+y)^2(x^2+y^2)^2$
C_3	$2[G/C_1]$	$(x^3+y^3)^2$
V_4	$3[G/C_2]$	$(x^2+y^2)^3$
A_4	$[G/C_2]$	x^6+y^6

$$(q_1, \dots, q_5) = (x^4y^2 + x^2y^4, x^5y + 2x^3y^3 + xy^5, 2x^3y^3, x^4y^2 + x^2y^4, x^6 + y^6)$$

Aus dem Koeffizienten von x^5y im zweiten Eintrag des Vektors liest man beispielsweise ab, dass alle fünfelementigen Teilmengen von M in einer gemeinsamen Bahn vom Typ $[G/C_2]$ liegen, wohingegen (vergleiche Koeffizient von x^3y^3) sich die dreielementigen Teilmengen in vier Bahnen (zwei vom Typ $[G/C_2]$, zwei vom Typ $[G/C_3]$) aufteilen.

4. Zur Struktur des Burnside-Rings

Wir wollen nun unser Wissen über die Struktur des Burnside-Rings einer endlichen Gruppe G noch vertiefen, indem wir eine vollständige Charakterisierung seiner Primideale angeben. Desweiteren erläutern wir, wie sich der Burnside-Ring des direkten Produkts zweier Gruppen aus den Burnside-Ringen der Einzelgruppen ergibt.

4.0.7. Satz: Primideale im Burnside-Ring

Sei G eine endliche Gruppe und $(U_i)_{1 \leq i \leq s}$ ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen. Ein Ideal $I \trianglelefteq B(G)$ ist Primideal genau dann, wenn ein $i \in \underline{s}$ und ein $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ existieren, sodass $I = \{x \in B(G) \mid |\text{fix}_{U_i}(x)| \in p\mathbb{Z}\}$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass jedes solche Ideal Primideal ist. Dazu halten wir fest: $|\text{fix}_U([M \times N])| = |\text{fix}_U([M])| \cdot |\text{fix}_U([N])|$, da (a, b) genau dann Fixpunkt unter U ist, wenn a und b Fixpunkte unter U sind. Gilt also $|\text{fix}_U([M \times N])| \in p\mathbb{Z}$, so ist bereits $|\text{fix}_U([M])| \in p\mathbb{Z}$ oder $|\text{fix}_U([N])| \in p\mathbb{Z}$, da $p\mathbb{Z}$ Primideal in \mathbb{Z} ist. Dass es sich überhaupt um ein Ideal handelt ist aufgrund der Additivität der Fixpunkte klar.

Sei umgekehrt $I \trianglelefteq B(G)$ ein Primideal. Dann ist nach Definition $B(G)/I =: R$ ein Integritätsbereich und wir betrachten die kanonische Projektion $\pi : B(G) \rightarrow B(G)/I$. Da $B(G) \neq \{0\}$ existiert ein minimales $U_i \leq G$ mit der Eigenschaft $\pi([G/U_i]) \neq 0 + I$. Sei nun $U_j \leq G$ eine weitere Untergruppe von G . Dann gilt $[G/U_i] \cdot [G/U_j] = |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \cdot [G/U_i] + \sum_{\ell=1}^{i-1} a_\ell [G/U_\ell]$ für geeignete $a_\ell \in \mathbb{Z}$ (vergleiche Markentafel). Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \pi([G/U_i] \cdot [G/U_j]) &= \pi([G/U_i]) |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \\ &= |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \cdot \pi([G/U_i]) + \pi \left(\sum_{\ell=1}^{i-1} a_\ell [G/U_\ell] \right) = |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \cdot \pi([G/U_i]) \end{aligned}$$

(aufgrund der Minimalität von U_i mit der Eigenschaft $\pi([G/U_i]) \neq 0 + I$).

Dann gilt aber aufgrund der Kürzungsregel für Integritätsbereiche:

$$\pi([G/U_j]) = |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \cdot 1_R \quad \forall 1 \leq j \leq s$$

Behauptung: Bezeichnet nun $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ die Charakteristik von R , so gilt

$$I = \ker(\pi) = \{x \in B(G) \mid |\text{fix}_{U_i}(x)| \equiv 0 \pmod{p}\}$$

. Beweis: Die erste Gleichheit ist klar.

„ \subseteq “: Sei also $M = \sum_{j=1}^s a_j [G/U_j] \in \ker(\pi)$ (mit geeigneten $a_j \in \mathbb{Z}$). Dann gilt $0 + I =$

$\pi(M) = \sum_{j=1}^s a_j |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \cdot 1_R + I$. Dann gilt aber $|\text{fix}_{U_i}(M)| = \sum_{i=1}^s |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \in p\mathbb{Z}$ (aufgrund der Charakteristik von R).

„ \supseteq “: Sei $M = \sum_{j=1}^s a_j [G/U_j]$ mit $\sum_{i=1}^s |\text{fix}_{U_i}([G/U_j])| \in p\mathbb{Z}$ ein Element von

$\{x \in B(G) \mid |\text{fix}_{U_i}(x)| \equiv 0 \pmod{p}\}$. Dann gilt offensichtlich (Rechnung wie oben) $\pi(M) = 0 + I$ und somit $M \in \ker(\pi)$.

Damit ist also $I = \{x \in B(G) \mid |\text{fix}_{U_i}(x)| \equiv 0 \pmod{p}\}$ von der gewünschten Gestalt. \square

4.0.8. Satz: Der Burnside-Ring des direkten Produkts

Seien G und H zwei endliche Gruppen von teilerfremder Ordnung. Dann gilt:

$$B(G \times H) = B(G) \otimes B(H)$$

Beweis:

Wir halten zunächst fest, dass aufgrund von $\text{ggT}(|G|, |H|) = 1$ jede Untergruppe von $G \times H$ wiederum das direkte Produkt einer Untergruppe von G und einer Untergruppe von H ist. Es gilt also $\{L \leq G \times H\} = \{U \times V \mid U \leq G, V \leq H\}$ vermöge der Bijektion $L \mapsto \pi_1(L) \times \pi_2(L)$, wobei π_i die Projektion auf die i -te Koordinate darstellt (wenn wir $G \times H$ tatsächlich als kartesisches Produkt auffassen). Analog gilt

$$U \times V \sim U' \times V' \Leftrightarrow U \sim U' \wedge V \sim V'.$$

Sei nun $(U_i)_{i=1..n}$ bzw. $(V_j)_{j=1..m}$ ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Un-

tergruppen von G bzw. H . Wir betrachten nun die folgende Abbildung:

$$\Phi : B(G) \times B(H) \rightarrow B(G \times H); \left(\sum_{i=1}^n a_i(G/U_i), \sum_{j=1}^m b_j(H/V_j) \right) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j (G \times H/U_i \times V_j)$$

Nach Definition ist Φ \mathbb{Z} -bilinear. Es bleibt also lediglich noch zu zeigen, dass jede bilineare Abbildung $\phi : B(G) \times B(H) \rightarrow T$ (T Ring) über Φ eindeutig faktorisiert. Auf dem Bild von Φ definiert ϕ offensichtlich bereits eine \mathbb{Z} -lineare Abbildung, es bleibt also lediglich zu zeigen, dass sich diese auf eindeutige Weise fortsetzen lässt. Nach der Vorbemerkung gilt aufgrund der Teilerfremdheit von $|G|$ und $|H|$ aber bereits $(U_i \times V_j)_{i=1..n, j=1..m}$ ist ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von $G \times H$. Dann enthält $\text{Bild}(\Phi)$ aber mit $\Phi(G/U_i, H/V_j) = G \times H/U_i \times V_j$ bereits die Standardbasis von $B(G \times H)$. Die durch ϕ auf $\text{Bild}(\Phi)$ definierte lineare Abbildung lässt sich demnach eindeutig fortsetzen und es gilt somit:

$$B(G \times H) = B(G) \otimes B(H)$$

□

4.0.9. Beispiel

Wir betrachten die Burnside-Ringe der Gruppen C_2 und C_3 . Für deren Markentafeln gilt:

$$M_{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_{C_3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nun das Kronecker-Produkt der beiden Matrizen, so erhalten wir:

$$M_{C_3} \otimes M_{C_2} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{C_6}$$

Wir erhalten also tatsächlich die Markentafel des Burnside-Rings des direkten Produkts.

Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Vielmehr kann man zeigen, dass stets eine Permutationsmatrix P existiert, sodass man $M(G \times H)$ als $P \cdot (M(G) \otimes M(H)) \cdot P^{tr}$ erhält.

Auf diese Weise lässt sich außerdem feststellen, dass auf die Bedingung der Teilerfremdheit in Satz 4.0.8 im Allgemeinen nicht verzichtet werden kann. So hat das Kroneckerprodukt der Markentafel der C_3 mit sich selbst vier Zeilen, wohingegen der Burnside-Ring der C_9 lediglich \mathbb{Z} -Rang 3 hat, da die C_9 nur drei Konjugiertenklassen von Untergruppen besitzt.

A. Literatur

Literatur

- [1] G. Nebe: Skript zur Computeralgebra, SS 2010
- [2] W. Plesken: Skript zur Computeralgebra, SS 2006
- [3] S. Bouc: Burnside Rings aus Handbook of Algebra, Band 2